数理解析研究所講究録 1333 巻 2003 年 1-20



# Cuntz 環から CAR 環へ*

京都大学・数理解析研究所　阿部 光雄 (Mitsuo Abe)
Research Instiiute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

無限自由度のフェルミオン系を記述する CAR 環の Cuntz 環 ($\mathcal{O}_{2^p}$, $p \in \mathbf{N}$) への埋め込みを具体的に構成し，Cuntz 環の諸性質 (相互の埋め込み, 自己準同型, 自己同型, 表現および自己準同型によるその分岐など) を CAR 環に制限することによって得られる CAR 環の構造について簡単に紹介する.

## §1. 序

Cuntz 環[6] は無限次元の非可換環でありながら，比較的取り扱いやすく具体的な計算に乗りやすい. 例えば，Cuntz 環相互の埋め込みや Cuntz 環の非自明な自己準同型を具体的にいくらでも構成することが可能である.[4] また，Cuntz 環の適当な表現と自己準同型との合成から表現の分岐を具体的に構成することによって，既約表現と可約表現の関連を自己準同型を通して見直すことも可能である.[4] この講演では，このような Cuntz 環の性質を Cuntz 環に埋め込まれた CAR 環 (Canonical Anti-commutation Relation algebra)[1] に制限することによって CAR 環の構造を探る方法について，具体的な表式を用いながら紹介したい.

## §2. CAR(Canonical Anti-commutation Relations) 環

**定義：** CAR 環とは下記の関係式を満たす $\{ a_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ で生成される $C^*$ 環とする.

$$\begin{aligned} &\{a_m, a_n\} = \{a_m^*, a_n^*\} = 0, \\ &\{a_m, a_n^*\} = \delta_{m,n} I, \end{aligned} \qquad m, n \in \mathbf{N}, \tag{2.1}$$
$$\text{where} \quad \{X, Y\} \equiv XY + YX.$$

ここで $I$ は単位元で，$a_n$ と $a_n^*$ は $n \in \mathbf{N}$ で識別される状態のフェルミオンの「消滅」演算子と「生成」演算子をあらわす. ただし,「消滅」「生成」の具体的意味は表現による. 以下では CAR 環の位相的な構造は扱わず，稠密な部分環について代数的にのみ考える.

よく知られている事実として，$N$ 次元 CAR 環，すなわち，式 (2.1) と同様な関係式を満たす $\{ a_n \mid 1 \leqq n \leqq N \}$ で生成される $C^*$ 環は $2N$ 次元 Clifford 代数と同型であり，従って，複素係数の $2^N$ 次行列環 $M_{2^N}$(又は $M_2$ の $N$ 次のテンソル積) と同型である. これを無限次元に外挿することにより，CAR 環は $\mathrm{UHF}_2 (\equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{2^n} \cong \bigotimes^{\infty} M_2)$ と同型であることが分かる. ただし，有限次元のときは同型がユニタリを除いて一意的に記述出来たことに対し，無限次元ではユニタリ非同値なものが連続無限個存在する.

CAR 環と $\mathrm{UHF}_2$ の生成元の 1 対 1 対応を簡単にまとめておく. まず，$I_2$, $A \in M_2$ を各々，2 次の単位行列，及び，$A^2 = 0$, $\{A, A^*\} = I_2$ を満たす行列とし，$K \equiv [A, A^*] (= K^* = K^{-1}, \{A, K\} = 0)$ とする. 例えば，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

*この講演は川村勝紀との共同研究に基づく.

のようにとれる．このとき，

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

であるから，A で生成される $C^*$ 環は $M_2$ と同型である．この $A$ 及び $K$ を用いると，CAR 環の生成元と $\mathrm{UHF}_2$ の生成元の間には次の 1 対 1 対応がある：

$$\begin{array}{lcl}
I & \Longleftrightarrow & I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots, \\
a_1 & \Longleftrightarrow & A \otimes I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots, \\
a_2 & \Longleftrightarrow & K \otimes A \otimes I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots, \\
a_3 & \Longleftrightarrow & K \otimes K \otimes A \otimes I_2 \otimes \cdots, \\
 & \vdots & \\
a_n & \Longleftrightarrow & \underbrace{K \otimes \cdots \otimes K}_{n-1} \otimes A \otimes I_2 \otimes \cdots; \\
\left(\prod_{k=1}^{n-1}[a_k, a_k{}^*]\right) a_n & \Longleftrightarrow & \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{n-1} \otimes A \otimes I_2 \otimes \cdots.
\end{array} \tag{2.4}$$

## §3. Recursive Fermion System (RFS): Cuntz 環への CAR 環の埋め込み

この節では Cuntz 環と行列環の関連を簡単に見た後，(2.4) の関係式に基づいて CAR 環の Cuntz 環への埋め込みを構成する．[1)]

### §§3-1. Cuntz 環と行列環

**定義**：Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ $(d = 2, 3, \ldots)$ とは，下記の関係式を満たす $\{s_1, s_2, \ldots, s_d\}$ で生成される $C^*$ 環とする．

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & s_i^* s_j = \delta_{i,j} I, & i, j = 1, 2, \ldots, d, \\
\text{(ii)} & \displaystyle\sum_{i=1}^{d} s_i s_i^* = I. &
\end{array} \tag{3.1}$$

以下では次のような記法をしばしば用いる．

$$\begin{aligned}
s_{i_1 i_2 \cdots i_m} &\equiv s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}, \\
s_{i_1 \cdots i_m ; j_n \cdots j_1} &\equiv s_{i_1} \cdots s_{i_m} s_{j_n}^* \cdots s_{j_1}^*.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

また，以下の議論では Cuntz 環の位相的な構造は扱わず，稠密な部分環について代数的にのみ考える．

$M_d$ を $\mathbf{C}$ 上の $d$ 次の行列環とし，$e_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, d)$ を $i$ 行 $j$ 列成分のみ 1 で他成分が全て 0 である $M_d$ の生成元とする．このとき，$e_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, d)$ は次式を満たす：

$$e_{i,j}\, e_{k,\ell} = \delta_{j,k}\, e_{i,\ell}. \tag{3.3}$$

従って，関係式 (3.1) から $\mathcal{O}_d$ の元 $s_{i;j}$ と $e_{i,j}$ とは代数的に 1 対 1 対応があることが容易に分かる．同様にして，$M_{d^2} \cong M_d \otimes M_d$ の生成元 $e_{i_1,j_1} \otimes e_{i_2,j_2}$ $(i_1, i_2, j_1, j_2 = 1, \ldots, d)$ と

$s_{i_1,i_2;j_2,j_1}$ が 1 対 1 に対応する．一般に，

$$M_{d^k} \cong \bigotimes^k M_d \cong \mathrm{Lin}\langle\{s_{i_1\cdots i_k;j_k\cdots j_1} \mid i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k = 1,\ldots,d\}\rangle \subset \mathcal{O}_d \tag{3.4}$$

を得る．従って，

$$\mathrm{UHF}_d \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{d^k} \cong \bigotimes^{\infty} M_d \cong \mathcal{O}_d^{U(1)} \subset \mathcal{O}_d. \tag{3.5}$$

ただし，$\mathcal{O}_d^{U(1)}$ は $\mathcal{O}_d$ の $U(1)$ 不変な部分環である：

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_d^{U(1)} &\equiv \{X \in \mathcal{O}_d \mid \gamma_z(X) = X,\ z \in U(1)\}, \\ &= \mathrm{Lin}\langle\{\, s_{i_1\cdots i_k;j_k\cdots j_1} \mid i_1,\ldots,j_k = 1,\ldots,d,\ k \in \mathbf{N}\}\,\rangle, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\gamma_z(s_i) \equiv z s_i, \quad i = 1,\ldots,d, \quad |z| = 1, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{3.7}$$

特に，$d = 2^p$ $(p \in \mathbf{N})$ のとき

$$\mathrm{CAR}\,環 \cong \mathrm{UHF}_{2^p} \cong \mathcal{O}_{2^p}^{U(1)} \subset \mathcal{O}_{2^p}, \quad p \in \mathbf{N}. \tag{3.8}$$

このように Cuntz 環には行列環のテンソル積的構造が内在するが，これは §4 で述べるように $\mathcal{O}_{d^p}$ の $\mathcal{O}_d$ への埋め込みが生成元の斉次式で書けることとも関連している．

## §§3-2. RFS in $\mathcal{O}_2$

**定義**: $a \in \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_2$ からそれ自身への線形写像 $\zeta$, $\mathcal{O}_2$ の (単位的) 自己準同型 $\varphi$ ($\varphi(X)\varphi(Y) = \varphi(XY)$, $\varphi(X^*) = \varphi(X)^*$, $\varphi(I) = I$) からなる 3 つ組 $R = (a, \zeta, \varphi)$ が次の条件を満たすとき，$R$ を $\mathcal{O}_2$ における **recursive fermion system (RFS)** と呼ぶ．

i) **seed condition:** $\quad a^2 = 0, \quad \{a, a^*\} = I,$

ii) **recursive condition:** $\quad \{a, \zeta(X)\} = 0, \ \ \zeta(X^*) = \zeta(X)^*, \quad X \in \mathcal{O}_2,$

iii) **normalization condition:** $\quad \zeta(X)\zeta(Y) = \varphi(XY), \quad X, Y \in \mathcal{O}_2.$

自己準同型については §4 を参照．$R$ に対応して，CAR 環の $\mathcal{O}_2$ への埋め込み $\Phi_R$ が定まる：

$$\begin{aligned} &\Phi_R : \mathrm{CAR} \hookrightarrow \mathcal{O}_2, \\ &\Phi_R(a_n) \equiv \zeta^{n-1}(a) \equiv (\underbrace{\zeta \circ \zeta \circ \cdots \circ \zeta}_{n-1})(a), \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

特に，(2.4) の表式に対応した

$$\begin{aligned} &a \equiv s_{1;2}, \\ &\zeta(X) \equiv s_1 X s_1^* - s_2 X s_2^*, \quad X \in \mathcal{O}_2, \\ &\varphi(X) \equiv s_1 X s_1^* + s_2 X s_2^* \equiv \rho_2(X), \quad X \in \mathcal{O}_2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

からなる3つ組 $SR = (\boldsymbol{a}, \zeta, \varphi)$ を**標準RFS**と呼ぶ．ただし，$\rho_2$ は $\mathcal{O}_2$ の canonical endomorphism である．$SR$ に対応する埋め込み $\Phi_{SR}$ は

$$\Phi_{SR}(\mathrm{CAR}) = \mathcal{O}_2^{U(1)} \tag{3.11}$$

を満たし，$\Phi_{SR}$ をCAR環の $\mathcal{O}_2$ への**標準埋め込み**と呼ぶ.[1)]

## §§3-3. RFSの一般化: RFS$_p$ in $\mathcal{O}_{2^p}$

**定義：** $p \in \mathbf{N}$ に対し，$\boldsymbol{a}_i \in \mathcal{O}_{2^p}$, $i = 1, \ldots, p$; $\mathcal{O}_{2^p}$ からそれ自身への線形写像 $\zeta_p$, $\mathcal{O}_{2^p}$ の(単位的)自己準同型 $\varphi_p$ からなる組 $R_p = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p; \zeta_p, \varphi_p)$ が次の条件を満たすとき $\mathcal{O}_{2^p}$ における RFS$_p$ と呼ぶ.[1)]

i) **seed condition:** $\{\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j\} = 0, \quad \{\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j^*\} = \delta_{i,j} I, \quad i, j = 1, \ldots, p,$

ii) **recursive condition:** $\{\boldsymbol{a}_i, \zeta_p(X)\} = 0, \quad \zeta_p(X^*) = \zeta_p(X)^*, \quad X \in \mathcal{O}_{2^p},$

iii) **normalization condition:** $\zeta_p(X)\zeta_p(Y) = \varphi_p(XY), \quad X, Y \in \mathcal{O}_{2^p}.$

$R_p$ に対応して，CARの $\mathcal{O}_{2^p}$ への埋め込み $\Phi_{R_p}$ が定まる：

$$\Phi_{R_p} : \mathrm{CAR} \hookrightarrow \mathcal{O}_{2^p},$$

$$\Phi_{R_p}(a_{(n-1)p+i}) \equiv \zeta_p^{n-1}(\boldsymbol{a}_i), \quad i = 1, \ldots, p, \quad n \in \mathbf{N}.$$

標準RFSの拡張として**標準RFS$_p$**, $SR_p = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p; \zeta_p, \varphi_p)$ を次のように定義する：[1)]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_i &= \sum_{k=1}^{2^{p-i}} \sum_{\ell=1}^{2^{i-1}} (-1)^{\sum_{m=1}^{i-1}\left[\frac{\ell-1}{2^{m-1}}\right]} s_{2^i(k-1)+\ell}\, s^*_{2^{i-1}(2k-1)+\ell}, \quad i = 1, \ldots, p, \\ \zeta_p(X) &= \sum_{i=1}^{2^p} (-1)^{\sum_{m=1}^{p}\left[\frac{i-1}{2^{m-1}}\right]} s_i X s_i^*, \\ \varphi_p(X) &= \rho_{2^p}(X) \equiv \sum_{i=1}^{2^p} s_i X s_i^*. \end{aligned} \tag{3.12}$$

ただし，$[x]$ は $x$ を越えない最大整数．このとき，$SR_p$ に対応する埋め込み $\Phi_{SR_p}$ は次式を満たす：

$$\Phi_{SR_p}(\mathrm{CAR}) = \mathcal{O}_{2^p}^{U(1)}. \tag{3.13}$$

また，§4で述べる $\mathcal{O}_{2^p}$ の $\mathcal{O}_2$ への斉次埋め込み $\Psi_p^{(2)}$ を用いると

$$\Phi_{SR} = \Psi_p^{(2)} \circ \Phi_{SR_p} \tag{3.14}$$

が成立する．

$SR_p$ $(p = 2, 3, 4)$ における $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p; \zeta_p)$ の表式は具体的に次のように与えられる：

(i) $p = 2$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 \equiv&\ s_{1;2} + s_{3;4}, \\ \boldsymbol{a}_2 \equiv&\ s_{1;3} - s_{2;4}, \\ \zeta_2(X) \equiv&\ s_1Xs_1^* - s_2Xs_2^* - s_3Xs_3^* + s_4Xs_4^*, \quad X \in \mathcal{O}_4 \end{aligned} \tag{3.15}$$

(ii) $p = 3$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 \equiv&\ s_{1;2} + s_{3;4} + s_{5;6} + s_{7;8}, \\ \boldsymbol{a}_2 \equiv&\ s_{1;3} - s_{2;4} + s_{5;7} - s_{6;8}, \\ \boldsymbol{a}_3 \equiv&\ s_{1;5} - s_{2;6} - s_{3;7} + s_{4;8}, \\ \zeta_3(X) \equiv&\ s_1Xs_1^* - s_2Xs_2^* - s_3Xs_3^* + s_4Xs_4^* \\ &-s_5Xs_5^* + s_6Xs_6^* + s_7Xs_7^* - s_8Xs_8^*, \quad X \in \mathcal{O}_8 \end{aligned} \tag{3.16}$$

(iii) $p = 4$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 \equiv&\ s_{1;2} + s_{3;4} + s_{5;6} + s_{7;8} + s_{9;10} + s_{11;12} + s_{13;14} + s_{15;16}, \\ \boldsymbol{a}_2 \equiv&\ s_{1;3} - s_{2;4} + s_{5;7} - s_{6;8} + s_{9;11} - s_{10;12} + s_{13;15} - s_{14;16}, \\ \boldsymbol{a}_3 \equiv&\ s_{1;5} - s_{2;6} - s_{3;7} + s_{4;8} + s_{9;13} - s_{10;14} - s_{11;15} + s_{12;16}, \\ \boldsymbol{a}_4 \equiv&\ s_{1;9} - s_{2;10} - s_{3;11} + s_{4;12} - s_{5;13} + s_{6;14} + s_{7;15} - s_{8;16}, \\ \zeta_4(X) \equiv&\ s_1Xs_1^* - s_2Xs_2^* - s_3Xs_3^* + s_4Xs_4^* \\ &-s_5Xs_5^* + s_6Xs_6^* + s_7Xs_7^* - s_8Xs_8^* \\ &-s_9Xs_9^* + s_{10}Xs_{10}^* + s_{11}Xs_{11}^* - s_{12}Xs_{12}^* \\ &+s_{13}Xs_{13}^* - s_{14}Xs_{14}^* - s_{15}Xs_{15}^* + s_{16}Xs_{16}^*, \quad X \in \mathcal{O}_{16} \end{aligned} \tag{3.17}$$

## §4. Cuntz 環の簡単な性質：埋め込みと自己準同型

### §§4-1. Cuntz 環の間の埋め込み

**定義：** $\mathcal{O}_{d'}$ が $\mathcal{O}_d$ へ埋め込み可能であるとは，次式を満たす $\mathcal{O}_{d'}$ から $\mathcal{O}_d$ への (*-) 準同型 $\psi$ が存在することである．

$$\psi : \mathcal{O}_{d'} \hookrightarrow \mathcal{O}_d,$$

$$\begin{aligned} \psi(\alpha X + \beta Y) &= \alpha\psi(X) + \beta\psi(Y), & \alpha, \beta \in \mathbf{C},\ X, Y \in \mathcal{O}_{d'}, \\ \psi(XY) &= \psi(X)\psi(Y) & X, Y \in \mathcal{O}_{d'}, \\ \psi(X^*) &= \psi(X)^*, & X \in \mathcal{O}_{d'}, \\ \psi(I_{d'}) &= I_d, \end{aligned} \tag{4.1}$$

ただし，$I_{d'}$, $I_d$ はそれぞれ $\mathcal{O}_{d'}$, $\mathcal{O}_d$ の単位元．$\psi$ を $\mathcal{O}_{d'}$ の $\mathcal{O}_d$ への埋め込みという．

埋め込みを定義するには生成元の像を与えればよいので，$\mathcal{O}_{d'}$ の生成元を $\{s'_1, \ldots, s'_{d'}\}$, $S_i \equiv \psi(s'_i)$ として，

$$\{S_1, \ldots, S_{d'}\} : \mathcal{O}_{d'} \hookrightarrow \mathcal{O}_d \tag{4.2}$$

のようにも書く．

埋め込みの簡単な具体例をあげる.[4)]

(1) $\mathcal{O}_d$ ($d \geqq 3$) の $\mathcal{O}_2$ への埋め込み ($s_1$, $s_2$ は $\mathcal{O}_2$ の生成元)

$$\{S_1 = s_1,\ S_2 = s_2 s_1,\ S_3 = (s_2)^2\} : \mathcal{O}_3 \hookrightarrow \mathcal{O}_2, \tag{4.3}$$

一般に

$$\begin{aligned} \{S_1 = s_1,\ \ S_2 = s_2 s_1,\ \ S_3 = (s_2)^2 s_1,\ \ldots,\ \ S_{d-2} = (s_2)^{d-3} s_1,\\ S_{d-1} = (s_2)^{d-2} s_1,\ \ S_d = (s_2)^{d-1}\} : \mathcal{O}_d \hookrightarrow \mathcal{O}_2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

(2) 帰納的埋め込み：任意の $\{S_1,\ \ldots,\ S_d\} : \mathcal{O}_d \hookrightarrow \mathcal{O}_2$ を用いて $\mathcal{O}_{d+1}$ の $\mathcal{O}_2$ への埋め込みが得られる

$$\{S_1,\ \ldots,\ S_{d-1},\ S_d\, s_1,\ S_d\, s_2\} : \mathcal{O}_{d+1} \hookrightarrow \mathcal{O}_2, \tag{4.5}$$

$$\{s_1,\ s_2 S_1,\ s_2 S_2,\ \ldots,\ s_2 S_d\} : \mathcal{O}_{d+1} \hookrightarrow \mathcal{O}_2. \tag{4.6}$$

(3) (1) の一般化：$\mathcal{O}_{(d-1)n+1}$ ($n \geqq 2$) の $\mathcal{O}_d$ への埋め込み

$$\{S_1 = s_1,\ S_2 = s_2,\ S_3 = s_3 s_1,\ S_4 = s_3 s_2,\ S_5 = (s_3)^2\} : \mathcal{O}_5 \hookrightarrow \mathcal{O}_3, \tag{4.7}$$

$$\{S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{(d-1)n+1}\} : \mathcal{O}_{(d-1)n+1} \hookrightarrow \mathcal{O}_d,$$

$$\left\{ \begin{array}{lcll} S_{(d-1)k+i} & = & (s_d)^k s_i & \text{for}\ \ 0 \leqq k \leqq n-1,\ 1 \leqq i \leqq d-1, \\ S_{(d-1)n+1} & = & (s_d)^n, & \end{array} \right. \tag{4.8}$$

ただし,$\{s_1, \ldots, s_d\}$ は $\mathcal{O}_d$ の生成元.

(4) (2) の一般化：任意の $\{S_1, \ldots, S_{(d-1)n+1}\} : \mathcal{O}_{(d-1)n+1} \hookrightarrow \mathcal{O}_d$ を用いて $\mathcal{O}_{(d-1)(n+1)+1}$ の $\mathcal{O}_d$ への埋め込みが得られる

$$\{S_1,\ \ldots,\ S_{(d-1)n},\ S_{(d-1)n+1} s_1,\ \ldots,\ S_{(d-1)n+1} s_d\} : \mathcal{O}_{(d-1)(n+1)+1} \hookrightarrow \mathcal{O}_d, \tag{4.9}$$

$$\{s_1,\ \ldots,\ s_{d-1},\ s_d S_1,\ \ldots,\ s_d S_{(d-1)n+1}\} : \mathcal{O}_{(d-1)(n+1)+1} \hookrightarrow \mathcal{O}_d. \tag{4.10}$$

(5) 斉次埋め込み：

$$\begin{gathered} \{S_1, \ldots, S_{d^p}\} : \mathcal{O}_{d^p} \hookrightarrow \mathcal{O}_d, \\ S_i \equiv s_{i_1 i_2 \ldots i_p}, \qquad i - 1 = \sum_{k=1}^{p} (i_k - 1) d^{k-1} \\ i = 1, 2, \ldots, d^p; \quad i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, d. \end{gathered} \tag{4.11}$$

この斉次埋め込みは以下の議論で重要なので，特に，$\Psi_p^{(d)} : \mathcal{O}_{d^p} \hookrightarrow \mathcal{O}_d$ のように表す.

### §§4-2. 簡単な自己準同型

**定義：** $\mathcal{O}_d$ からそれ自身への埋め込みを $\mathcal{O}_d$ の自己準同型という.

よく知られている例として次の canonical endomorphism $\rho$ がある：

$$\rho(s_i) \equiv \sum_{k=1}^{d} s_k s_i s_k^*, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{4.12}$$

具体的に $\mathcal{O}_d$ の自己準同型を構成する上で，適当な Cuntz 環 $\mathcal{O}_{d'}$ の $\mathcal{O}_d$ への埋め込みとの対応を知っておくことは非常に役に立つ．すなわち, $\mathcal{O}_d$ の自己準同型と $\mathcal{O}_{(d-1)n+1}$ $(n \geqq 2)$ の $\mathcal{O}_d$ への埋め込みは 1 対 1 に対応する.

例として，$d = n = 2$ の場合を考えよう．$\mathcal{O}_2$ の任意の自己準同型 $\varphi$ に対して，

$$S_1 \equiv \varphi(s_1), \quad S_2 \equiv \varphi(s_2)s_1, \quad S_3 \equiv \varphi(s_2)s_2 \tag{4.13}$$

と置くと，$\{S_1, S_2, S_3\}$ は $\mathcal{O}_3$ の $\mathcal{O}_2$ への埋め込みを与える．逆に，$\mathcal{O}_3$ の $\mathcal{O}_2$ への任意の埋め込みを $\{S_1, S_2, S_3\}$ として，

$$\varphi(s_1) \equiv S_1, \qquad \varphi(s_2) \equiv S_2 s_1^* + S_3 s_2^* \tag{4.14}$$

と置くと，$\varphi$ は $\mathcal{O}_2$ 自己準同型を与える．特に，

$$\varphi(s_i) = s_i \qquad i = 1, 2 \iff \left\{S_1 = s_1,\ S_2 = s_2 s_1,\ S_3 = (s_2)^2\right\}, \tag{4.15}$$

$$\varphi(s_i) = \rho(s_i),\ i = 1, 2 \iff \left\{S_1 = \rho(s_1),\ S_2 = s_1 s_2,\ S_3 = (s_2)^2\right\}. \tag{4.16}$$

また，$\{S_1, S_2, S_3\}$ を置換することにより，新たな自己準同型 $\varphi$ が容易に作れる：

$$\left\{S_1 = s_1,\ S_2 = (s_2)^2,\ S_3 = s_2 s_1\right\}$$
$$\iff \varphi(s_1) = s_1,\ \varphi(s_2) = s_2(s_2 s_1^* + s_1 s_2^*), \tag{4.17}$$
$$\left\{S_1 = (s_2)^2,\ S_2 = s_2 s_1,\ S_3 = s_1\right\}$$
$$\iff \varphi(s_1) = (s_2)^2,\ \varphi(s_2) = s_2 s_1 s_1^* + s_1 s_2^*, \tag{4.18}$$
$$\left\{S_1 = (s_2)^2,\ S_2 = s_1,\ S_3 = s_2 s_1\right\}$$
$$\iff \varphi(s_1) = (s_2)^2,\ \varphi(s_2) = s_1 s_1^* + s_2 s_1 s_2^*. \tag{4.19}$$

一般の $\mathcal{O}_d$ の場合については文献 4) を参照のこと.

## §5. 表現

$\mathcal{O}_2$(or $\mathcal{O}_{2^p}$) の既約置換表現のひとつである標準表現を $\Phi_{SR}(\mathrm{CAR}) = \mathcal{O}_2^{U(1)}$(or $\Phi_{SR_p}(\mathrm{CAR}) = \mathcal{O}_{2^p}^{U(1)}$) に制限することによって CAR 環の Fock 表現が得られる．一般の既約置換表現を制限した場合は可約表現になる.

**定義：** $\mu_i : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $i = 1, \ldots, d$ $(d \geqq 2)$ が下記の条件を満たす時，$\{\mu_i\}_{i=1}^d$ を $\mathbf{N}$ 上の**分岐関数系**と呼ぶ：

$$\mu_i \text{は単射}\,(i = 1, \ldots, d), \quad \mu_i(\mathbf{N}) \cap \mu_j(\mathbf{N}) = \emptyset \;\; (i \neq j), \quad \bigcup_{i=1}^{d} \mu_i(\mathbf{N}) = \mathbf{N}. \tag{5.1}$$

**定義：** $\{\mu_i\}_{i=1}^d$ を $\mathbf{N}$ 上の分岐関数系とし，$z_{i,n} \in \mathbf{C}$, $|z_{i,n}| = 1$ $(i = 1, \ldots, d;\; n \in \mathbf{N})$ とする．また，$\mathcal{H} \equiv \ell_2(\mathbf{N})$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ の完全正規直交系，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の線形有界作用素全体とする．$\mathcal{O}_d$ から $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ への $(*\text{-})$ 準同型 $\pi^{(d)}$ が

$$\pi^{(d)}(s_i)e_n = z_{i,n}e_{\mu_i(n)}, \quad i = 1, \ldots, d, \quad n \in \mathbf{N} \tag{5.2}$$

を満たす時，$(\mathcal{H},\ \pi^{(d)})$ を $(\{\mu_i\}_{i=1}^d, z_{i,n})$ に付随した $\mathcal{O}_d$ の**置換表現**という．特に，

$$\mu_i(n) = (n-1)d + i, \quad z_{i,n} = 1 \tag{5.3}$$

のとき,$\pi^{(d)}$ を $\pi_s^{(d)}$ と表し，$(\mathcal{H},\ \pi_s^{(d)})$ を $\mathcal{O}_d$ の**標準表現**という．

標準表現では,

$$\pi_s^{(d)}(s_1)e_1 = e_1 \tag{5.4}$$

が成立し，他に $\pi_s^{(d)}(x)$ $(x \in \mathcal{O}_d)$ の固有ベクトルは存在しない．また，斉次埋め込み $\Psi_p^{(d)} : \mathcal{O}_{d^p} \hookrightarrow \mathcal{O}_d$ を用いると

$$\pi_s^{(d^p)} = \pi_s^{(d)} \circ \Psi_p^{(d)} \tag{5.5}$$

という関係式が成立する．

$\mathcal{O}_{2^p}$ の標準表現 $\pi_s^{(2^p)}$ と CAR 環の $\mathcal{O}_{2^p}$ への標準埋め込み $\Phi_{SR_p}$ から CAR 環の $\mathcal{H}$ 上の表現が得られる：

$$\mathrm{CAR} \overset{\Phi_{SR_p}}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_{2^p} \xrightarrow{\pi_s^{(2^p)}} \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad p \geqq 1 \quad (\Phi_{SR_1} \equiv \Phi_{SR}). \tag{5.6}$$

(3.14) と (5.5) から直ちにわかるように，この表現は $p$ によらない：

$$\begin{aligned}
\pi_s^{(2^p)} \circ \Phi_{SR_p} &= (\pi_s^{(2)} \circ \Psi_p^{(2)}) \circ \Phi_{SR_p} \qquad\qquad (p \geqq 2)\\
&= \pi_s^{(2)} \circ (\Psi_p^{(2)} \circ \Phi_{SR_p}) = \pi_s^{(2)} \circ \Phi_{SR}.
\end{aligned}$$

この CAR 環の表現 $\pi_F^{\mathrm{CAR}} \equiv \pi_s^{(2)} \circ \Phi_{SR}$ が Fock 表現の他ならない．すなわち，

$$\pi_s^{(2)}(s_1^*)\,e_1 = e_1, \quad \pi_s^{(2)}(s_2^*)\,e_1 = 0 \tag{5.7}$$

より

$$\begin{aligned}
\pi_F^{\mathrm{CAR}}(a_n)\,e_1 &= (\pi_s^{(2)} \circ \Phi_{SR})(a_n)\,e_1 = \pi_s^{(2)}(\zeta^{n-1}(s_{1;2}))\,e_1\\
&= \pi_s^{(2)}(s_1^{n-1}\,s_{1;2})\,e_1 = 0, \qquad n \in \mathbf{N}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

が得られので，$e_1$ は消滅演算子 $a_n$ $(n\in\mathbf{N})$ に対する真空になる．また，真空 $e_1$ に関する Fock 空間 $\mathcal{V}\subset\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{V}=\mathrm{Lin}\langle\{e_1,\ \pi_F^{\mathrm{CAR}}(a_{n_1}^*\cdots a_{n_k}^*)\,e_1,\ 1\leqq n_1<\cdots<n_k,\ k\in\mathbf{N}\}\rangle, \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}\pi_F^{\mathrm{CAR}}(a_{n_1}^*a_{n_2}^*\cdots a_{n_k}^*)\,e_1 &= \pi_s^{(2)}(s_1^{n_1-1}\,s_2\,s_1^{n_2-n_1-1}\,s_2\,\cdots\,s_1^{n_k-n_{k-1}-1}\,s_2)\,e_1\\ &= e_{N(n_1,\cdots,n_k)}, \qquad n_1<n_2<\cdots<n_k,\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$N(n_1,\cdots,n_k)\equiv 2^{n_1-1}+2^{n_2-1}+\cdots+2^{n_k-1}+1 \tag{5.11}$$

のように表されるが，${}^\forall n\in\mathbf{N}$ は $N(n_1,\cdots,n_k)-1$ の形に書けるので，結局，$\mathcal{V}=\mathcal{H}$ が得られ，$e_1$ は $\mathcal{H}$ の巡回ベクトルになり，消滅演算子 $a_n$ $(n\in\mathbf{N})$ に対する真空は $e_1$ のみである．

$\mathcal{O}_d$ の他の置換表現については，特に，$L=(i_1,\ldots,i_\kappa)$, $i_j=1,\ldots,d$, $z\in\mathbf{C}$, $|z|=1$ として，$s_{i_1\ldots i_\kappa}$ が固有ベクトル (固有値 $z$) をもつ置換表現 $\mathrm{Rep}(L\,;z)$, $(\mathcal{H},\ \pi_{L,z}^{(d)})$ を考える．$\mathrm{Rep}(L)\equiv\mathrm{Rep}(L;1)$ と書くと，$\mathrm{Rep}(1)$ は標準表現である．以下では $\pi\equiv\pi_{L,z}^{(d)}$ と略記して，$\pi(s_{i_1\ldots i_\kappa})\,e_1=z\,e_1$ とすると

$$\begin{aligned}\pi(s_{i_\kappa i_1\cdots i_{\kappa-1}})\,e_\kappa &= z\,e_\kappa, & e_\kappa &\equiv \pi(s_{i_\kappa})\,e_1,\\ \pi(s_{i_{\kappa-1}i_\kappa i_1\cdots i_{\kappa-2}})\,e_{\kappa-1} &= z\,e_{\kappa-1}, & e_{\kappa-1} &\equiv \pi(s_{i_{\kappa-1}})\,e_\kappa,\\ &\vdots & &\vdots\\ \pi(s_{i_2\cdots i_\kappa i_1})\,e_2 &= z\,e_2, & e_2 &\equiv \pi(s_{i_2})e_3,\\ \pi(s_{i_1\cdots i_\kappa})\,e_1 &= e_1, & e_1 &= \pi(s_{i_1})e_2\end{aligned} \tag{5.12}$$

となるので，$(e_1,e_2,\ldots,e_\kappa)$ をサイクル，$\kappa$ をサイクルの長さと呼ぶ．$L$ の任意の巡回置換を $L'$ とすると，明らかに，$\mathrm{Rep}(L;z)\cong\mathrm{Rep}(L';z)$ である．また，$\mathrm{Rep}(L,z)$ が既約であるための必要十分条件は，巡回表現であって，かつ $L=(i_1,\ldots,i_\kappa)$ が非周期的であることである．ただし，$L=(i_1,\ldots,i_\kappa)$ が周期的であるとは，$\kappa$ の約数 $M(\neq 1)$ が存在して $(i_M,\ldots,i_\kappa,i_1,\ldots,i_{M-1})=(i_1,\ldots,i_\kappa)$ となることである．例えば，$(1,1)$, $(2,2,2)$, $(1,2,1,2)$ は周期的で，$(1,2)$, $(1,1,2)$ は非周期的である．また，可約な置換表現の既約分解の例としては次のようなものがある：

$$\mathrm{Rep}(1,1;\,1)\cong\mathrm{Rep}(1)\oplus\mathrm{Rep}(1;\,-1), \tag{5.13}$$

$$\mathrm{Rep}(2,2,2;\,1)\cong\bigoplus_{k=0}^{2}\mathrm{Rep}(2;\,w^k),\quad w^2+w+1=0. \tag{5.14}$$

$\mathcal{O}_d$ の置換表現に関する詳しい議論はこの講究録の川村勝紀の記述を参照のこと．

次に，$\mathcal{O}_2$ の表現 $\mathrm{Rep}(L;z)$ $L=(i_1,\ldots,i_\kappa)$, $|z|=1$ と $\Phi_{SR}$ から得られる CAR の表現について簡単にまとめておく：

$$\begin{aligned}&\pi_L^{\mathrm{CAR}}:\mathrm{CAR}\ \overset{\Phi_{SR}}{\hookrightarrow}\ \mathcal{O}_2\ \xrightarrow{\pi_{L,z}^{(2)}}\ \mathcal{L}(\mathcal{H}),\\ &\pi_L^{\mathrm{CAR}} = \pi_{L,z}^{(2)}\circ\Phi_{SR} \qquad (\ z\text{ によらない})\\ &\qquad\cong \bigoplus_{\lambda=1}^{\kappa}(\pi_F^{\mathrm{CAR}}\circ\phi_{L,\lambda}).\end{aligned} \tag{5.15}$$

ただし，$\phi_{L,\lambda}$ $(\lambda = 1, ..., \kappa)$ は次の Bogoliubov 変換である：

$$\phi_{L,\lambda}(a_n) \equiv \begin{cases} a_n & \text{for } i_j = 1, \\ a_n^* & \text{for } i_j = 2, \end{cases} \tag{5.16}$$

$$n - 1 + \lambda = \kappa(m-1) + j, \quad m \in \mathbf{N}, \quad 1 \leqq j \leqq \kappa. \tag{5.17}$$

例えば，$L = (1,2)$ のときは，

$$\phi_{L,1}(a_n) = \begin{cases} a_n, & n\text{: odd}, \\ a_n^*, & n\text{: even}, \end{cases} \qquad \phi_{L,2}(a_n) = \begin{cases} a_n, & n\text{: even}, \\ a_n^*, & n\text{: odd}. \end{cases} \tag{5.18}$$

また，$L = (1,1,2)$ のときは，

$$\begin{aligned} \phi_{L,1}(a_n) &= \begin{cases} a_n, & n = 1,\ 2 \quad \bmod 3, \\ a_n^*, & n = 0 \quad \bmod 3, \end{cases} \\ \phi_{L,2}(a_n) &= \begin{cases} a_n, & n = 0,\ 1 \quad \bmod 3, \\ a_n^*, & n = 2 \quad \bmod 3, \end{cases} \\ \phi_{L,3}(a_n) &= \begin{cases} a_n, & n = 2,\ 0 \quad \bmod 3, \\ a_n^*, & n = 1 \quad \bmod 3. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.19}$$

## §6. CAR 環の自己準同型と表現の分岐：even CAR と KMS 状態

Stø rmer は 1970 年に CAR 環の偶部分環は CAR 環自身に同型であるという大変興味深い定理を示した.[7)]

**定理 (Stø rmer, 1970)：**

$$\mathrm{CAR}_{\mathrm{even}} \cong \mathrm{CAR},$$

$$\mathrm{CAR}_{\mathrm{even}} \equiv \{X \in \mathrm{CAR} \mid \widetilde{\Gamma}(X) = X\},$$

$$\widetilde{\Gamma}(a_n) = -a_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Stø rmer によるこの定理の証明は $\mathrm{CAR}_{\mathrm{even}} \cong \mathrm{UHF}_2 (\cong \mathrm{CAR})$ を示すだけの簡単なものであるが，CAR 環としての生成元の対応はよくわからない．$\mathcal{O}_2$ の自己準同型と標準 RFS を経由すると分かりやすいので，まずその方法について紹介する.[1,4)]

### §§6-1. $\mathcal{O}_2$ の自己準同型と even CAR

CAR 環の $\mathcal{O}_2$ への標準埋め込み $\Phi_{SR}$ は $\Phi_{SR}(\mathrm{CAR}) = \mathcal{O}_2^{U(1)}$ を満たすので，一般に，$\mathcal{O}_2$ の自己準同型 $\varphi$ が (3.7) で定義される $U(1)$ の作用 $\gamma_z$ と可換なとき，すなわち

$$\gamma_z \circ \varphi = \varphi \circ \gamma_z, \quad |z| = 1 \tag{6.1}$$

のとき

$$(\varphi \circ \Phi_{SR})(\mathrm{CAR}) = \varphi(\mathcal{O}_2^{U(1)}) \subset \mathcal{O}_2^{U(1)} = \Phi_{SR}(\mathrm{CAR}) \tag{6.2}$$

が成り立ち，$\Phi_{SR}$ によって $\varphi$ から CAR 環の自己準同型 $\widetilde{\varphi}$ が誘導される：

$$\widetilde{\varphi} \equiv \Phi_{SR}^{-1} \circ \varphi \circ \Phi_{SR} \tag{6.3}$$

$U(1)$ の作用 $\gamma_z$ と可換な $\mathcal{O}_2$ の自己準同型の例として, 次式で与えられる $\varphi_p$ $(p \in \mathbf{N})$ を考える：

$$\begin{cases} \varphi_p(s_1) \equiv s_1, \\ \varphi_p(s_2) \equiv s_2\, \rho^{p-1}(J), \qquad J \equiv s_{2\,;\,1} + s_{1\,;\,2} = J^* = J^{-1} \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\rho(X) = s_1 X s_1^* + s_2 X s_2^*, \quad X \in \mathcal{O}_2. \tag{6.5}$$

特に，$p = 1$ のときは

$$\begin{cases} \varphi_1(s_1) \equiv s_1, \\ \varphi_1(s_2) \equiv s_2\, J = s_{22\,;\,1} + s_{21\,;\,2} \end{cases} \tag{6.6}$$

となり, これは (4.17) と等しい．この $\varphi_p$ $(p \in \mathbf{N})$ から得られる CAR 環の自己準同型 $\widetilde{\varphi}_p \equiv \Phi_{SR}^{-1} \circ \varphi_p \circ \Phi_{SR}$ に対して，次が定理が成り立つ.

**定理：** $\widetilde{\varphi}_1(\mathrm{CAR}) = \mathrm{CAR}_{\mathrm{even}}$, $\quad \widetilde{\varphi}_p(\mathrm{CAR}) \subsetneqq \mathrm{CAR}_{\mathrm{even}}$, $\quad p \geqq 2$.

一般に CAR の自己準同型 $\widetilde{\varphi}$ が $\widetilde{\varphi}(\mathrm{CAR}) \subset \mathrm{CAR}_{\mathrm{even}}$ を満たすとき，$\widetilde{\varphi}$ を even-CAR 自己準同型と呼ぶことにする.

**定理の証明)** $\Gamma(s_1) \equiv s_1$, $\Gamma(s_2) \equiv -s_2$ ($\mathcal{O}_2$ の自己同型) とすると，$\Gamma(s_{1;2}) = -s_{1;2}$, $\Gamma \circ \zeta = \zeta \circ \Gamma$ より

$$\Gamma \circ \Phi_{SR}(a_n) = -\Phi_{SR}(a_n) \quad \therefore \; \widetilde{\Gamma} = \Phi_{SR}^{-1} \circ \Gamma \circ \Phi_{SR},$$

よって，$\Phi_{SR}(\mathrm{CAR}) = \mathcal{O}_2^{U(1)}$ から

$$\Phi_{SR}(\mathrm{CAR}_{\mathrm{even}}) = (\mathcal{O}_2^{U(1)})_{\mathrm{even}} \equiv \{X \in \mathcal{O}_2^{U(1)} \mid \Gamma(X) = X\}. \tag{6.7}$$

従って，$\varphi_p(\mathcal{O}_2^{U(1)}) \subset \mathcal{O}_2^{U(1)}$ と $\Gamma \circ \varphi_p = \varphi_p$ より，一般に次が成立する：

$$\varphi_p(\mathcal{O}_2^{U(1)}) \subset (\mathcal{O}_2^{U(1)})_{\mathrm{even}}, \qquad p \in \mathbf{N}. \tag{6.8}$$

特に，$p = 1$ のときは,

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\mathcal{D}_k) = \mathcal{E}_k, \quad k \in \mathbf{N}, \\ &\quad \mathcal{D}_k \equiv \{X = s_{i_1 \cdots i_k\,;\,j_k \cdots j_1} \mid i_k = j_k\}, \\ &\quad \mathcal{E}_k \equiv \{X = s_{i_1 \cdots i_k\,;\,j_k \cdots j_1} \mid \Gamma(X) = X\} \\ &\qquad \Big(\{\mathcal{E}_k \mid k \in \mathbf{N}\} = (\mathcal{O}_2^{U(1)})_{\mathrm{even}}\text{の生成元の集合}\Big) \end{aligned} \tag{6.9}$$

が成立するので $\varphi_1(\mathcal{O}_2^{U(1)}) \supset (\mathcal{O}_2^{U(1)})_{\text{even}}$. 従って，

$$\varphi_1(\mathcal{O}_2^{U(1)}) = (\mathcal{O}_2^{U(1)})_{\text{even}} \quad \therefore\ \widetilde{\varphi}_1(\mathrm{CAR}) = \mathrm{CAR}_{\text{even}}. \tag{6.10}$$

一方，$p \geqq 2$ のときは，$\varphi_p$ は自己準同型の合成として次のように書き直せる：

$$\varphi_p = \varphi'_p \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ \varphi'_p, \tag{6.11}$$

$$\varphi'_p(s_1) \equiv s_1, \quad \varphi'_p(s_2) \equiv s_2 \prod_{k=0}^{p-2} \rho^k(J). \tag{6.12}$$

ここで，$\varphi'_p$ 全射ではないので

$$\varphi_p(\mathcal{O}_2^{U(1)}) = \varphi'_p(\varphi_1(\mathcal{O}_2^{U(1)})) \subsetneqq \varphi_1(\mathcal{O}_2^{U(1)}) = (\mathcal{O}_2^{U(1)})_{\text{even}}, \quad p \geqq 2. \tag{6.13}$$

$$\therefore\ \widetilde{\varphi}_p(\mathrm{CAR}) \subsetneqq \mathrm{CAR}_{\text{even}}, \quad p \geqq 2. \qquad \square$$

次に，even-CAR 自己準同型 $\widetilde{\varphi}_p$ の生成元による表式をまとめておく．

$p = 1$ のとき：一般に $\widetilde{\varphi}_1(a_n)$ は $2n$ 次式で，$\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ を全て含む．$\widetilde{\varphi}_1(a_n)$ の漸化式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_1(a_1) &= -a_1(a_2 + a_2^*), \\
\widetilde{\varphi}_1(a_2) &= -(a_1 a_1^* a_2 + a_1^* a_1 a_2^*)(a_3 + a_3^*), \\
\widetilde{\varphi}_1(a_n) &= a_1 a_1^*\, b'_{n-1} - a_1^* a_1\, b''_{n-1}, \quad n \geqq 3, \\
b'_{n-1} &\equiv (\widetilde{\varphi}_1(a_{n-1})\ \text{の}\ a_k,\ a_k^*\ \text{を}\ a_{k+1},\ a_{k+1}^*\ \text{に変える．}\ k = 1, \ldots, n), \\
b''_{n-1} &\equiv (b'_{n-1}\ \text{の}\ a_2\ \text{と}\ a_2^*\ \text{を入れかえ}).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$p \geqq 2$ のとき：$\widetilde{\varphi}_p(a_n)$ の漸化式は次で与えられる．

$$\widetilde{\varphi}_p(a_n) = \begin{cases} a_n \displaystyle\prod_{\ell=1}^{n+p-1} K_\ell\,(a_{n+p} + a_{n+p}^*) & \text{for } 1 \leqq n \leqq p, \\ b_{m,n} \displaystyle\prod_{\ell=n-p}^{n+p-1} K_\ell\,(a_{n+p} + a_{n+p}^*) & \text{for } mp+1 \leqq n \leqq (m+1)p,\ m \in \mathbf{N}, \end{cases} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
b_{1,n} &\equiv a_{n-p}\, a_{n-p}^*\, a_n + a_{n-p}^*\, a_{n-p}\, a_n^*, \\
b_{2,n} &\equiv a_{n-2p}\, a_{n-2p}^*\, b_{1,n} + a_{n-2p}^*\, a_{n-2p}\, b'_{1,n}, \\
b_{m,n} &\equiv a_{n-mp}\, a_{n-mp}^*\, b_{m-1,n} - a_{n-mp}^*\, a_{n-mp}\, b'_{m-1,n}, \quad m \geqq 3, \\
b'_{m,n} &\equiv (b_{m,n}\ \text{の}\ a_{n-mp}\ \text{と}\ a_{n-mp}^*\ \text{を入れかえ}), \\
K_\ell &\equiv [a_\ell,\, a_\ell^*].
\end{aligned} \tag{6.16}$$

§§6-2. 表現の分岐：CAR 環の KMS 状態

$\pi, \varphi$ を各々$\mathcal{O}_2$ の既約置換表現，及び，自己準同型とすると，一般に，それらの合成 $\pi \circ \varphi$ は既約置換表現の直和に分岐する：

$$\pi \circ \varphi \cong \bigoplus_{L \in S} \pi_L \tag{6.17}$$

特に，標準表現 $\pi_s$ と (6.4) で定義される $\varphi_p$ $(p \in \mathbf{N})$ に対して，次の分岐公式を得る：

$$\begin{aligned} \pi_s \circ \varphi_p &\cong \bigoplus_{L \in IPR_p} \pi_L, \\ IPR_p &\equiv \{\mathrm{Rep}(i_1, \ldots, i_\kappa) \mid \kappa \text{は } p \text{ の約数，既約}\} \end{aligned} \tag{6.18}$$

例えば，

$$\pi_s \circ \varphi_1 \cong \pi_s \oplus \pi_2, \tag{6.19}$$

$$\pi_s \circ \varphi_2 \cong \pi_s \oplus \pi_2 \oplus \pi_{1,2}, \tag{6.20}$$

$$\pi_s \circ \varphi_3 \cong \pi_s \oplus \pi_2 \oplus \pi_{1,1,2} \oplus \pi_{1,2,2}, \tag{6.21}$$

$$\pi_s \circ \varphi_4 \cong \pi_s \oplus \pi_2 \oplus \pi_{1,2} \oplus \pi_{1,1,1,2} \oplus \pi_{1,1,2,2} \oplus \pi_{1,2,2,2}. \tag{6.22}$$

この分岐公式と CAR 環の $\mathcal{O}_2$ への埋め込み $\Phi_{SR}$ から CAR 環の Fock 表現の $\widetilde{\varphi}_p$ による分岐公式が得られる：[4)]

$$\begin{aligned} \pi_p^{\mathrm{CAR}} &\equiv \pi_F^{\mathrm{CAR}} \circ \widetilde{\varphi}_p = (\pi_s \circ \Phi_{SR_1}) \circ (\Phi_{SR}^{-1} \circ \varphi_p \circ \Phi_{SR}) \\ &= \pi_s \circ \varphi_p \circ \Phi_{SR} \cong \bigoplus_{L \in IPR_p} \pi_L \circ \Phi_{SR} \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{2^p} \left(\pi_F^{\mathrm{CAR}} \circ \phi_i\right), \end{aligned} \tag{6.23}$$

$$\phi_i(a_{p(m-1)+j}) \equiv \begin{cases} a_{p(m-1)+j} & i_j = 1, \\ a^*_{p(m-1)+j} & i_j = 2, \end{cases} \quad m \in \mathbf{N},\ j = 1, \ldots, p, \tag{6.24}$$

$$i = 1, \ldots, 2^p \iff (i_1, \ldots, i_p),\ i_j = 1, 2 \ :\ i - 1 = \sum_{j=1}^{p} (i_j - 1) 2^{j-1} \tag{6.25}$$

次に，$\pi_p^{\mathrm{CAR}} \equiv \pi_F^{\mathrm{CAR}} \circ \widetilde{\varphi}_p$ から得られる CAR 環の期待値汎関数 (状態) $\omega$ を以下のように定義する：

$$\omega(X) \equiv \langle \Omega \mid \pi_p^{\mathrm{CAR}}(X)\, \Omega \rangle, \qquad X \in \mathrm{CAR} \tag{6.26}$$

$$\Omega \equiv \sum_{i=1}^{2^p} \sqrt{\Lambda_i}\, e_1^{(i)}, \qquad \sum_{i=1}^{2^p} \Lambda_i = 1, \quad \Lambda_i \geqq 0, \tag{6.27}$$

$$e_1^{(i)} : \text{表現}\,(\pi_F^{\mathrm{CAR}} \circ \phi_i)\,\text{の真空}, \quad (\pi_F^{\mathrm{CAR}} \circ \phi_i)(a_n)\, e_1^{(i)} = 0, \tag{6.28}$$

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{2^p} \mathcal{H}^{(i)}, \qquad \mathcal{H}^{(i)} \perp \mathcal{H}^{(j)}, \quad i \neq j, \tag{6.29}$$

$$\mathcal{H}\text{ の完全正規直交系}: \{\, e_n \mid n \in \mathbf{N}\}, \tag{6.30}$$

$$\mathcal{H}^{(i)}\text{ の完全正規直交系}: \{\, e_n^{(i)} \mid n \in \mathbf{N}\}, \quad e_1^{(i)} = e_i, \quad i = 1, \ldots, 2^p. \tag{6.31}$$

このとき, 2点関数は

$$\begin{cases} \omega(\, a_{p(m-1)+j}\, a^*_{p(n-1)+k}\,) = \delta_{m,n}\delta_{j,k}\,(1-\lambda_j), \\ \omega(\, a^*_{p(m-1)+j}\, a_{p(n-1)+k}\,) = \delta_{m,n}\delta_{j,k}\,\lambda_j, \end{cases} \qquad m, n \in \mathbf{N}, \quad j, k = 1, \ldots, p, \tag{6.32}$$

$$1 - \lambda_j \equiv \sum_{\{i \mid i_j = 1\}} \Lambda_i, \quad \lambda_j = \sum_{\{i \mid i_j = 2\}} \Lambda_i, \qquad 0 \leqq \lambda_j \leqq 1, \tag{6.33}$$

$$i = 1, \ldots, 2^p \iff (i_1, \ldots, i_p),\ i_j = 1, 2 \ :\ i - 1 = \sum_{j=1}^{p} (i_j - 1) 2^{j-1} \tag{6.34}$$

で与えられる. 注意すべきことは, 任意の $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ $(0 \leqq \lambda_j \leqq 1)$ に対して, 上の関係式を満たす $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{2^p})$ が存在することである. 例えば,

$$\Lambda_i = \prod_{j=1}^{p} \Lambda_{j, i_j}, \tag{6.35}$$

$$\Lambda_{j, i_j} \equiv \begin{cases} 1 - \lambda_j & \text{for } i_j = 1 \\ \lambda_j & \text{for } i_j = 2 \end{cases} \tag{6.36}$$

とすればよい.

続いて, (6.32) で与えられる状態 $\omega$ を $\{\lambda_j\}_{j=1}^p$ を用いて簡単に分類する.

(1) $\lambda_j = 0$ or $1$ $(j = 1, \ldots, p)$ の場合 : $\omega$ は純粋状態

$$\Lambda_i = \delta_{i,\ell}, \quad \ell \equiv \sum_{\{j \mid \lambda_j = 1\}} 2^{j-1} + 1, \tag{6.37}$$

$$\pi_p^{\mathrm{CAR}} = \pi_F^{\mathrm{CAR}} \circ \phi_\ell\ (=\text{既約表現}). \tag{6.38}$$

(2) $\lambda_j = 1/2$ $(j = 1, \ldots, p)$ の場合 : $\omega$ はトレース状態

$$\omega(XY) = \omega(YX), \qquad X, Y \in \mathrm{CAR}. \tag{6.39}$$

(3) $0 < \lambda_j < 1/2$ $(j = 1, \ldots, p)$ の場合 $(1/2 < \lambda_j < 1$ も同様) : $\omega$ は KMS 状態

$$\lambda_j = \frac{1}{1 + \exp(\beta\,\varepsilon_j)}, \qquad \beta > 0, \quad \varepsilon_j > 0 \tag{6.40}$$

とおくと, $\omega$ は CAR の次の自己同型 $\tau_t$ $(t \in \mathbf{R})$ の 1 径数群に対する KMS 条件を満

$$\tau_t(a_{p(m-1)+j}) = \exp(-\sqrt{-1}\,\varepsilon_j\,t)\,a_{p(m-1)+j}, \tag{6.41}$$

$$\text{KMS条件}\ :\ \omega(X\,\tau_{\sqrt{-1}\beta}(Y)) = \omega(YX), \quad X,Y \in \text{CAR}. \tag{6.42}$$

(4) その他の場合：生成元の単項式 $X \in$CAR については適当な積 $X = X_1X_2X_3$ の形に分解することにより

$$\omega(X_1X_2X_3) = \omega_1(X_1)\,\omega_2(X_2)\,\omega_3(X_3), \tag{6.43}$$

$$\omega_1 : \text{純粋状態},\quad \omega_2 : \text{トレース状態},\quad \omega_3 : \text{KMS 状態} \tag{6.44}$$

のように表される．

上記の分類は，Araki-Woods の因子環の分類[5] の特殊な場合として理解可能であろう．

CAR 環の自己同型 (6.41) は次のように $\mathcal{O}_{2^p}$ の自己同型 $\alpha_t$ から得ることもできる．

$$\tau_t = \Phi_{SR_p}^{-1} \circ \alpha_t \circ \Phi_{SR_p}, \tag{6.45}$$

$$\alpha_t(s_i) \equiv \exp\left(\sqrt{-1}\,\varepsilon(i)\,t\right) s_i, \tag{6.46}$$

$$\varepsilon(i) \equiv \sum_{j=1}^{p}(i_j-1)\varepsilon_j + \varepsilon, \quad i-1 = \sum_{j=1}^{p}(i_j-1)2^{j-1}. \tag{6.47}$$

しかし，CAR の KMS 状態 $\omega$ が $\mathcal{O}_{2^p}$ の KMS 状態から得られているわけではない．CAR 環の場合と異なり Cuntz 環では，上のような形の自己同型 $\alpha_t$ の 1 径数群に関する KMS 状態の $\beta\,(=1/k_BT)$ は $\{\varepsilon(i)\}$ に応じて一意的に決まることが知られている．

## §7. CAR 環の非線形変換：非自明な時間発展

自己準同型の場合と同様に，$U(1)$ の作用 $\gamma_z$ と可換な $\mathcal{O}_{2^p}$ の自己同型 $\alpha$ から $\Phi_{SR_p}$ により CAR 環の自己同型 $\tau$ が誘導される：

$$\tau(a_n) \equiv (\Phi_{SR_p}^{-1} \circ \alpha \circ \Phi_{SR_p})(a_n), \quad n \in \mathbf{N}. \tag{7.1}$$

$\gamma_z$ と可換な自己同型の例として，特に，$U(2^p)$ の $\mathcal{O}_{2^p}$ への作用を考える：

$$\begin{gathered}\alpha : U(2^p) \curvearrowright \mathcal{O}_{2^p},\\ \alpha_u(s_i) \equiv \sum_{k=1}^{2^p} s_k u_{ki}, \quad u \in U(2^p), \quad i = 1,\ldots,2^p.\end{gathered} \tag{7.2}$$

これにより，$U(2^p)$ の CAR への作用として CAR の非線形変換群が得られる：[2,4]

$$\begin{aligned} &\tau : U(2^p) \curvearrowright \text{CAR},\\ \tau_u(a_n) &\equiv (\Phi_{SR_p}^{-1} \circ \alpha_u \circ \Phi_{SR_p})(a_n), \quad u \in U(2^p), \quad n \in \mathbf{N}\\ &= (a_k,\, a_\ell^* \text{ の多項式}),\\ &\text{ただし，} p(m-1)+1 \leqq n \leqq pm \text{ のとき } k,\ell \leqq pm. \end{aligned} \tag{7.3}$$

$\mathrm{Aut}^{\mathrm{CAR}}_{U(2^p)} \equiv \{\tau_u \,|\, u \in U(2^p)\}$ とおくと，次が成り立つことがわかる：

1) $\mathrm{Aut}^{\mathrm{CAR}}_{U(2^p)} \subset \mathrm{Aut}^{\mathrm{CAR}}_{U(2^{mp})}, \qquad m \geqq 2,$

2) $\mathrm{Aut}^{\mathrm{CAR}}_{U(2^p)} \circ \mathrm{Aut}^{\mathrm{CAR}}_{U(2^q)} \subset \mathrm{Aut}^{\mathrm{CAR}}_{U(2^r)}, \quad r : p,\ q$ の公倍数.

従って，CAR 環の無限次元非線形変換群として次を得る：

$$\mathrm{Aut}^{\mathrm{CAR}}_{U} \equiv \{\, \tau_u \,|\, u \in U(2^p),\, p \in \mathbf{N}\,\} \tag{7.4}$$

以下では，特に，$U(2^p)$ の $\mathcal{O}_{2^p}$ への作用で $s_1$ が up to $U(1)$ で変わらない場合を考えよう．そのような自己同型 $\tau_u$ 全体の中から 1 径数群

$$\{\tau_t \mid t \in \mathbf{R}\} \tag{7.5}$$

を作り，それを CAR 環の時間発展と見なそう．この時間発展は

(i) 自由時間発展を含む．($\tau_t$ が線形変換のとき)

(ii) Fock 真空は不変.

(iii) 一般に $\tau_t$ は非線形変換なので，相異なる時刻における粒子数固有状態は，粒子数が異なっても互いに直交するとは限らない．すなわち，一般に時間発展によって粒子数は変わる．

(iv) 一般に，異なる時刻のオペレーターを含む真空期待値 (〜ワイトマン関数) は 2 点関数の積に帰着せず，自由場 (準粒子場) 系とは異なる．

$\tau_t$ の例を具体的に二つ与える．尚，簡単のため，以下では $\pi^{\mathrm{CAR}}_F(a_n)$ と $a_n$ を同一視する．

1) $\mathcal{O}_4$ の自己同型かれ誘導される例：

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_t(s_i) = s_i, \qquad i = 1,2, \\ \alpha_t(s_3) = \cos\theta_t\, s_3 - \sin\theta_t\, s_4, \\ \alpha_t(s_4) = \sin\theta_t\, s_3 + \cos\theta_t\, s_4, \end{array} \right. \qquad \theta_t \equiv \mu\, t, \quad \mu : \text{real constant} \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned} \tau_t(a_{2m-1}) &= G_{m-1}\Big[a_{2m-1} - \sin\theta_t\Big(\sin\theta_t(a_{2m-1}+a^*_{2m-1}) - \cos\theta_t\, W_{2m-1}\Big)a^*_{2m}a_{2m}\Big], \\ \tau_t(a_{2m}) &= G_{m-1}\Big[\cos\theta_t\, a_{2m} + \sin\theta_t\, W_{2(m-1)}\,(a_{2m-1} - a^*_{2m-1})\, a_{2m}\Big], \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$G_n \equiv \prod_{k=1}^{n} F_k, \quad G_0 \equiv I, \tag{7.8}$$

$$F_k \equiv I - 2\sin\theta_t\Big(\sin\theta_t\, I - \cos\theta_t\, W_{2(k-1)}\,(a_{2k-1} - a^*_{2k-1})\Big)a^*_{2k}a_{2k}, \tag{7.9}$$

$$W_n \equiv \prod_{\ell=1}^{n} K_\ell, \quad W_0 \equiv I, \quad K_\ell \equiv [a_\ell,\, a^*_\ell]. \tag{7.10}$$

Fock 真空はもちろん $e_1$ である：

$$\tau_t(a_n)\, e_1 = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{7.11}$$

直ちに分かるように，一般に，時刻 $t=0$ の 2 粒子状態と時刻 $t$ の 1 粒子状態は直交しない：

$$\langle\, \tau_t(a^*_{2m})\, e_1 \mid \tau_0(a^*_{2m-1}a^*_{2m})\, e_1 \,\rangle = -\sin\theta_t. \tag{7.12}$$

従って，$\tau_t$ のもとでは粒子数は保存しない．そこで，時刻 $t$ での粒子数オペレータ $N_t$ を次式で定義する．

$$N_t \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tau_t(a^*_n a_n), \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned}\tau_t(a^*_{2m-1}a_{2m-1}) = H_{m-1}\Big[a^*_{2m-1}a_{2m-1} + \sin\theta_t\big(\sin\theta_t\, K_{2m-1}\\ + \cos\theta_t(a_{2m-1}+a^*_{2m-1})\big)a^*_{2m}a_{2m}\Big],\end{aligned} \tag{7.14}$$

$$\tau_t(a^*_{2m}a_{2m}) = H_{m-1}\, a^*_{2m}a_{2m}, \tag{7.15}$$

$$H_n \equiv \prod_{k=1}^{n}\big(I + \sin^2(2\theta_t)\, a^*_{2k}a_{2k}\big), \quad H_0 \equiv I. \tag{7.16}$$

時刻 $t=0$ での $k$ 粒子状態による $N_t$ の期待値

$$\omega(N_t;\, v_k) \equiv \langle\, v_k \mid N_t\, v_k \,\rangle, \quad N_0\, v_k = k\, v_k, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{7.17}$$

$$v_k \equiv v_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = a^*_{n_1}a^*_{n_2}\cdots a^*_{n_k}\, e_1, \quad n_1 < \cdots < n_k \tag{7.18}$$

を考えると，次のようになる：

$$\omega(N_t;\, v_{n_1}) = \begin{cases} 1 & \text{for } n_1 = 2m_1 - 1, \\ 1+\sin^2\theta_t & \text{for } n_1 = 2m_1, \end{cases} \quad m_1 \in \mathbf{N}, \tag{7.19}$$

$$\begin{aligned}&\omega(N_t;\, v_{n_1,n_2})\\ &= \begin{cases} 2 & \text{for } n_1 = 2m_1-1,\ n_2 = 2m_2-1, \\ 2-\sin^2\theta_t & \text{for } n_1 = 2m_1-1,\ n_2 = 2m_1, \\ 2+\sin^2\theta_t & \text{for } n_1 = 2m_1-1,\ n_2 = 2m_2, \\ 2+\sin^2\theta_t+\sin^2(2\theta_t) & \text{for } n_1 = 2m_1,\quad n_2 = 2m_2-1, \\ (2+\sin^2(2\theta_t))(1+\sin^2\theta_t) & \text{for } n_1 = 2m_1,\quad n_2 = 2m_2, \end{cases}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad m_1, m_2 \in \mathbf{N}\ (m_1 < m_2),\end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\omega(N_t;\, v_{n_1,\ldots,n_k}) = \begin{cases} k, & \text{for all } n_j\text{'s odd}, \\ \vdots & \\ \dfrac{(1+\sin^2(2\theta_t))^k - 1}{\sin^2(2\theta_t)}\,(1+\sin^2\theta_t), & \text{for all } n_j\text{'s even}. \end{cases} \tag{7.21}$$

次に，一般時刻のオペレータの真空期待値

$$a_n(t) \equiv (\pi_F^{\rm CAR} \circ \tau_t)(a_n), \qquad \omega(X) \equiv \langle\, e_1 \,|\, X\, e_1 \,\rangle \tag{7.22}$$

について見てみる．ここでは簡単のため，$a_1, a_2$ についてだけ考える．まず，２点及び３点関数は

$$\omega\big(a_1(t_1)a_1^*(t_2)\big) = 1, \tag{7.23}$$
$$\omega\big(a_2(t_1)a_2^*(t_2)\big) = \cos(\theta_1-\theta_2), \tag{7.24}$$
$$\omega\big(a_2(t_1)a_2^*(t_2)a_1^*(t_3)\big) = \omega\big(a_1(t_2)a_2(t_4)a_2^*(t_3)\big)^* = \sin(\theta_1-\theta_2), \tag{7.25}$$
$$\omega\big(a_2(t_1)a_1^*(t_2)a_2^*(t_3)\big) = \omega\big(a_2(t_3)a_1(t_2)a_2^*(t_1)\big)^* = \sin(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_2-\theta_3), \tag{7.26}$$

ただし $\theta_i \equiv \theta_{t_i} = \mu\, t_i$ で，他はゼロ．

$a_1, a_2$ の (truncate された) ４点関数は

$$\begin{aligned}
\omega\big(a_1(t_1)a_2(t_2)a_1^*(t_3)a_2^*(t_4)\big)_{\rm T} &= \omega\big(a_2(t_4)a_1(t_3)a_2^*(t_2)a_1^*(t_1)\big)_{\rm T}^* \\
&= \omega\big(a_1(t_1)a_2(t_2)a_1^*(t_3)a_2^*(t_4)\big) + \omega\big(a_1(t_1)a_1^*(t_3)\big)\,\omega\big(a_2(t_2)a_2^*(t_4)\big) \\
&= -\cos(\theta_3-\theta_2)\cos(\theta_3-\theta_4) + \cos(\theta_2-\theta_4) \\
&= \sin(\theta_2-\theta_3)\sin(\theta_3-\theta_4),
\end{aligned} \tag{7.27}$$

$$\begin{aligned}
&\omega\big(a_2(t_1)a_1(t_2)a_1^*(t_3)a_2^*(t_4)\big)_{\rm T} \\
&\quad = \omega\big(a_2(t_1)a_1(t_2)a_1^*(t_3)a_2^*(t_4)\big) - \omega\big(a_1(t_2)a_1^*(t_3)\big)\,\omega\big(a_2(t_1)a_2^*(t_4)\big) \\
&\quad = \cos(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_2-\theta_3)\cos(\theta_3-\theta_4) - \cos(\theta_1-\theta_4) \\
&\quad = \sin(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_2-\theta_3)\cos(\theta_3-\theta_4) + \sin(\theta_1-\theta_3)\sin(\theta_3-\theta_4),
\end{aligned} \tag{7.28}$$

$$\omega\big(a_2(t_1)a_1^*(t_2)a_1(t_3)a_2^*(t_4)\big)_{\rm T} = \sin(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_2-\theta_3)\sin(\theta_3-\theta_4), \tag{7.29}$$

ただし，T は truncation を表し，他の４点関数はゼロ．同様にして (trancate された) ５点，６点関数にもゼロでないものがあることがわかる．

**2)** $\mathcal{O}_{16}$ の自己同型かれ誘導される例：

$$\begin{aligned}
&\alpha_t(s_i) = s_i, \quad i = 1,4,6,7,10,11,13,16, \\
&\begin{cases} \alpha_t(s_2) = \cos(\mu_1 t)\, s_2 - \sin(\mu_1 t)\, s_{15}, \\ \alpha_t(s_{15}) = \sin(\mu_1 t)\, s_2 + \cos(\mu_1 t)\, s_{15}, \end{cases} \\
&\begin{cases} \alpha_t(s_3) = \cos(\mu_2 t)\, s_3 - \sin(\mu_2 t)\, s_{14}, \\ \alpha_t(s_{14}) = \sin(\mu_2 t)\, s_3 + \cos(\mu_2 t)\, s_{14}, \end{cases} \\
&\begin{cases} \alpha_t(s_5) = \cos(\mu_3 t)\, s_5 - \sin(\mu_3 t)\, s_{12}, \\ \alpha_t(s_{12}) = \sin(\mu_3 t)\, s_5 + \cos(\mu_3 t)\, s_{12}, \end{cases} \\
&\begin{cases} \alpha_t(s_9) = \cos(\mu_4 t)\, s_9 - \sin(\mu_4 t)\, s_8, \\ \alpha_t(s_8) = \sin(\mu_4 t)\, s_9 + \cos(\mu_4 t)\, s_8, \end{cases} \\
&\mu_j : \text{real const.}, \quad j = 1,2,3,4.
\end{aligned} \tag{7.30}$$

この場合，少なくとも一組の $(\mu_{j_1}, \mu_{j_2})$ の比が無理数なら $\alpha_t$ は $t$ について非周期的である．

$$\tau_t(a_{m,j_1}) = \Bigl(\sum_{i=1}^{4} \cos(\mu_{j_i}\, t)\, F_{m,j_i}\Bigr)\, a_{m,j_1} + \sum_{i=1}^{4} \sin(\mu_{j_i}\, t)\, G_{m,j_i}, \tag{7.31}$$

$$a_{m,j} \equiv a_{4(m-1)+j}, \qquad m \in \mathbf{N}, \quad j = 1,2,3,4, \tag{7.32}$$

$$\begin{aligned} &F_{m,j_1} \equiv I - \sum_{i=2}^{4} F_{m,j_i}, \\ &F_{m,j_2} \equiv a^*_{m,j_2} a_{m,j_2}(I - a^*_{m,j_3} a_{m,j_3} - a^*_{m,j_4} a_{m,j_4}) + a^*_{m,j_3} a_{m,j_3} a^*_{m,j_4} a_{m,j_4}, \end{aligned} \tag{7.33}$$

$F_{m,j_3}$，$F_{m,j_4}$ は $F_{m,j_2}$ の $(j_2, j_3, j_4)$ を巡回置換したもの;

$$\begin{aligned} &G_{m,j_1} = a_{m,j_2} a_{m,j_3} a_{m,j_4}, \qquad && G_{m,j_2} = a_{m,j_2} a^*_{m,j_3} a^*_{m,j_4}, \\ &G_{m,j_3} = -a^*_{m,j_2} a_{m,j_3} a^*_{m,j_4}, && G_{m,j_4} = a^*_{m,j_2} a^*_{m,j_3} a_{m,j_4}, \end{aligned} \tag{7.34}$$

$(j_1, j_2, j_3, j_4)$ は $(1,2,3,4)$ の巡回置換.

一般に標準 $\mathrm{RFS}_p$ では，$\tau_t(a_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ は次のように書ける：

$$\tau_t(a_j) = \Phi^{-1}_{SR_p}(u_t\, \boldsymbol{a}_j\, u_t^*), \qquad \boldsymbol{a}_j : \ \text{seed}, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{7.35}$$

$$u_t \equiv \sum_{i=1}^{2^j} \alpha_t(s_i)\, s_i^*. \tag{7.36}$$

今の $\tau_t$ の例では，各 $m \in \mathbf{N}$ での $\{a_{p(m-1)+j} \mid j = 1, \ldots, 4\}$ は seed $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_4\}$ と全く同じ形の変換をするので，seed に対するユニタリ $u_t$ を $\{a_{p(m-1)+j} \mid m \in \mathbf{N},\ j = 1, \ldots, 4\}$ に対するものに外挿出来る．従って，Hamiltonian $H$ は次のように得られる：

$$\tau_t(a_n) = e^{\sqrt{-1}\, H t}\, a_n\, e^{-\sqrt{-1}\, H t}, \quad H^* = H, \tag{7.37}$$

$$\begin{aligned} H = -\sqrt{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{4} a^*_{m,j_1} \Bigl( &\mu_{j_1}\, a_{m,j_2} a_{m,j_3} a_{m,j_4} + \mu_{j_2}\, a_{m,j_2} a^*_{m,j_3} a^*_{m,j_4} \\ &- \mu_{j_3}\, a^*_{m,j_2} a_{m,j_3} a^*_{m,j_4} + \mu_{j_4}\, a^*_{m,j_2} a^*_{m,j_3} a_{m,j_4} \Bigr), \end{aligned} \tag{7.38}$$

$$a_{m,j} \equiv a_{4(m-1)+j} \tag{7.39}$$

ただし,$(j_1, j_2, j_3, j_4)$ は $(1,2,3,4)$ の巡回置換.

上の $H$ は Fock 表現，若しくは，$\alpha_t$ のもとで不変な Cuntz 環の表現から得られる CAR の表現においてのみ well-defined である．

## §8. まとめ

Cuntz 環 $\mathcal{O}_{2^p}$ への CAR 環の埋め込みを具体的に構成した．この埋め込みを用いると，Cuntz 環の性質から CAR のいろいろな性質が導かれる．特に，Cuntz 環では無限次元の環に特有な (全射でない) 自己準同型の具体的な構成が比較的容易であるため，それから CAR の自己準同型が具体的に構成できる．今回は CAR を even CAR へ写す自己準同型

を構成して，それによるFock表現の分岐からKMS状態が得られることを紹介した：

$$\begin{array}{lcl} \text{CAR} & \sim & \text{物理系} + (p\,\text{自由度の熱浴}) \;:\; \text{純粋状態 (Fock 表現)} \\ \Big\Downarrow & & \widetilde{\varphi}_p = \Phi_{SR}^{-1} \circ \varphi_p \circ \Phi_{SR} \quad \text{(自己準同型)} \\ \text{even CAR} & \sim & \text{物理系} \;:\; \text{KMS 状態 } (p\,\text{準位に縮退}) \end{array}$$

自己同型については，ユニタリ群のCuntz環への作用からCARの非自明な1径数群(時間発展)が得られることを示した．ただし，今までのところ現実的な物理系への直接の応用については不明である．

また今回は紹介出来なかったが，不定計量が入る理論への拡張も容易で，特にstring理論のFP ghostの表現への応用がある．[3)]

**References**


1) M. Abe and K. Kawamura, Commun. Math. Phys. **228**, 85–101 (2002)
2) M. Abe and K. Kawamura, Lett. Math. Phys. **60**, 101–107 (2002)
3) M. Abe and K. Kawamura, Int. J. Mod. Phys. **A18**, 607–625 (2003)
4) M. Abe and K. Kawamura, RIMS-1362 (math-ph/0207003)
5) H. Araki and E. J. Woods, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 4, 51–130 (1968)
6) J. Cuntz, Commun. Math. Phys. **57**, 173–185 (1977)
7) E. Stormer, Commun. Math. Phys. **16**, 136–137 (1970)